Física y Nudos: Una exposición sobre los invariantes presentes en la naturaleza

Byron Abel Raul Hernández Pacay[1]
Isabela Recio Hernández[2]

[1]Universidad de San Carlos de Guatemala
[2]Universität Hamburg

8 de junio de 2024

Contenido

Nudo

Sea $K \subset \mathbb{R}^3$. Decimos que K es un nudo si existe un homeomorfismo en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$, $f : \mathbb{S}^1 \to K$ donde $\mathbb{S}^1$ es el circulo unitario $\mathbb{S}^1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$.

Enlace

Diremos que $L \subset \mathbb{R}^3$ es un enlace si es la unión disjunta de nudos.

Equivalencia de nudos

Dos nudos K_1 y K_2 son equivalentes si existe un homeomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de forma que $f(K_1) = K_2$.

Figura: Formando un nudo, recuperada de [1].

Teorema de Reidemeister

Dos nudos son equivalentes si y solo si, sus diagramas están relacionados por una sucesión finita de movimientos de Reidemeister.

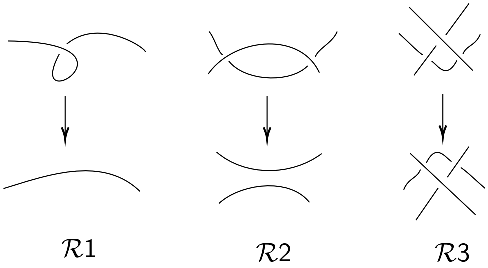


Figura: Movimientos de Reidemeister.

Teorema de Seifert-van Kampen

Sea $X = U \cup V$, donde U y V son abiertos en X; si U, V y $U \cup V$ son conexos por caminos; sea $x_0 \in U \cap V$. Sea H un grupo y sean

$$\phi_1 : \pi_1(U, x_0) \to H \qquad \phi_2 : \pi_1(V, x_0) \to H$$

sean homomorfismos. Sean i_1, i_2, j_1, j_2 los homomorfismos indicados en el siguiente diagrama inducido por inclusión.

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U, x_0) \arrow[d, "j_1"] \arrow[dr, "\phi_1"] & \\
\pi_1(U \cap V, x_0) \arrow[ur, "i_1"] \arrow[r] \arrow[dr, "i_2"'] & \pi_1(X, x_0) \arrow[r, dotted, "\Phi"] & H \\
 & \pi_1(V, x_0) \arrow[u, "j_2"'] \arrow[ur, "\phi_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Si $\phi_1 \circ i_1 = \phi_2 \circ i_2$, entonces, existe un homomorfismo único $\Phi : \pi_1(X, x_0) \to H$ tal que $\Phi \circ j_1 = \phi_1$ y $\Phi \circ j_2 = \phi_2$.

Grupo de un nudo

Si K es un nudo, llamamos a $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K)$ el grupo del nudo K.

$$\pi_1\left(\mathbb{R}^3 - \right.$$

$$\left.\right) = \langle x, y \mid xyx = yxy \rangle$$

$$\pi_1\left(\mathbb{R}^3 - \bigcirc\right) \cong \mathbb{Z}$$

Invariantes algebraicos

En este contexto consideraremos un invariante como una propiedad que se preserva bajo isotopías.

Invariantes algebraicos

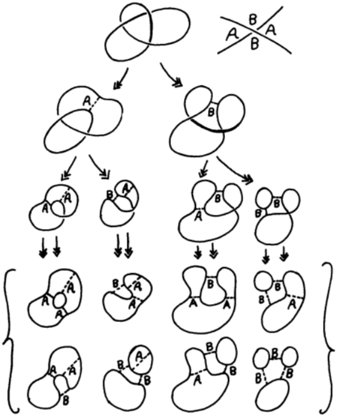


Figura: Descomposición del nudo trebol por Kauffman, recuperada de [4].

Invariantes algebraicos

Corchete de Kauffman

Sea L un enlace cuyo diagrama tiene n cruces, entonces el corchete de Kauffman se define como el polinomio en tres variables $\langle L \rangle \in \mathbb{Z}[A, B, d]$

$$\langle L \rangle = \langle L \rangle (A, B, d) = \sum_{i=1}^{2^n} \langle L | \sigma_i \rangle d^{||\sigma_i||}$$

donde σ_i son los estados de L.

Primer invariante algebraico

El corchete de Kauffman es invariante bajo $\mathcal{R}2$ y $\mathcal{R}3$ con la sustitución $B = A^{-1}$ y $d = -A^2 - A^{-2}$.

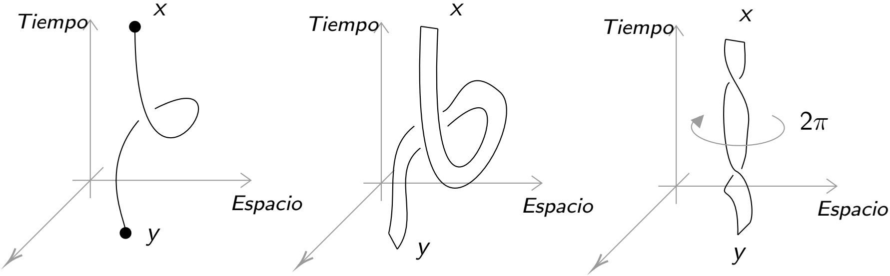
Caracterización del polinomio de Jones

Sea $\mathcal{L}_L(A) = (-A^3)^{-w(L)} \langle L \rangle$, entonces

$$\mathcal{L}_L(t^{-1/4}) = V_L(t).$$

Conexiones con física

Teorema Spin-Estadística



Conexiones con física

Mecánica Estadística

Funciones de partición

Dado un conjunto de variables aleatorias X_i tomando valores x_i y algún tipo de función potencial o Hamiltoniano $H(x_1, x_2, \ldots)$ la función de partición $\mathcal{Z}(\beta)$ se define como

$$\mathcal{Z}(\beta) = \sum_{x_i} e^{-\beta H(x_1, x_2, \ldots)}$$

donde β es un parámetro real.

Bibliografía

[1] Colin Conrad Adams. *The knot book: an elementary introduction to the mathematical theory of knots*. W.H. Freeman, 1994.

[2] Stewart S. Cairns. "An Elementary Proof of the Jordan-Schoenflies Theorem". En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 2.6 (1951), págs. 860-867. ISSN: 00029939, 10886826. URL: http://www.jstor.org/stable/2031698 (visitado 15-05-2024).

[3] Youngsik Huh y Seungsang Oh. "An upper bound on stick number of knots". En: *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 20.05 (2011), págs. 741-747.

[4] Louis H. Kauffman. *Knots and physics*. 3rd ed. World Scientific, 2001. ISBN: 978-058-54-5917-2,978-981-02-4111-7,978-981-02-4112-4. URL: https://doi.org/10.1142/4256.

[5] James Munkres. *Topology*. 2nd ed. Prentice Hall, Inc, 2000. ISBN: 9780131816299,0131816292.

[6] R. H. Fox R. H. Crowell. *Introduction to knot theory*. 1963 Corr 4th Printing. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1984. ISBN: 978-038-79-0272-2,978-354-09-0272-0. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-9935-6.

[7] Frederick Reif. *Fundamentals of statistical and thermal physics*. Waveland Press, 2009.

[8] Steven H Simon. "Topological Quantum: Lecture Notes and Proto-Book". En: *Unpublished prototype.[online] Available at: http://www-thphys. physics. ox. ac. uk/people/SteveSimon* 26 (2020), pág. 35.

[9] Raymond Frederick Streater y Arthur Strong Wightman. *PCT, spin and statistics, and all that*. Vol. 30. Princeton University Press, 2000.

¡Gracias!